RIGID GEOMETRIES ON SINGULAR SPACES OF FOLIATION LEAVES AND THEIR AUTOMORPHISM GROUPS

N.I. Zhukova

We introduce a category of rigid geometries on singular spaces which are leaf spaces of foliations and are considered as leaf manifolds. We single out a special category $\mathfrak{F}_0$ of leaf manifolds containing the orbifold category as a full subcategory. Objects of $\mathfrak{F}_0$ may have non-Hausdorff topology unlike orbifolds. The topology of some objects of $\mathfrak{F}_0$ does not satisfy the separation axiom T_0. It is shown that a rigid geometry $(\mathcal{N},\zeta)$, where $\mathcal{N} \in Ob(\mathfrak{F}_0)$, admits a desingularization. Moreover, for every such geometry $(\mathcal{N},\zeta)$ we prove the existence and the uniqueness of a finite dimensional Lie group structure on the group of all automorphisms $Aut(\mathcal{N},\zeta)$ of the rigid geometry ζ on $\mathcal{N}$. The application to orbifolds is considered.

Keywords: Foliation, leaf space, leaf manifold, rigid geometry, automorphism group, orbifold.

УДК 514.76

ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КАТЕГОРИИ МНОГООБРАЗИЙ НАД АЛГЕБРАМИ

С.К. Зубкова[1]

1 *zubkova.s.k@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Рассматриваются соответствия между голоморфными геометрическими объектами на трансверсальном расслоении второго порядка слоеного многообразия.

Ключевые слова: Многообразие над алгеброй, производная Ли, трансверсальное расслоение второго порядка.

Пусть $(M,\mathscr{F})$ — гладкое многообразие размерности $n+m$ со слоением коразмерности n, а $\mathbb{D}^2$ — алгебра срезанных многочленов степени два одного переменного или алгебра плюральных чисел [1] $a+b\varepsilon+c\varepsilon^2$, операция умножения в которой определяется соотношением $\varepsilon^3=0$. Трансверсальное расслоение второго порядка $T^2_{tr}M$ многообразия $(M,\mathscr{F})$ несет на себе естественную структуру гладкого многообразия над $\mathbb{D}^2$, моделируемого модулем $(\mathbb{D}^2)^n \oplus \mathbb{R}^m$.

Со слоением $\mathscr{F}$ на многообразии M ассоциируются расслоение трансверсальных r-реперов $T^r_{tr}M$ со структурной группой G^r_n и расслоение $P^r_{fol}M$ слоеных r-реперов, образованное r-джетами ростков изоморфизмов слоений $f:(\mathbb{R}^{n+m},0)\to M$, структурная группа $G^r_{n,m}$ которого образована r-джетами ростков автоморфизмов слоения $\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$. Расслоение $P^r_{fol}M$ является подрасслоением в расслоении $T^r_{n,m}M$ r-джетов ростков морфизмов слоений $f:(\mathbb{R}^{n+m},0)\to M$.

Пусть, далее, $q:F\to\overline{F}$ — локально тривиальное расслоение, такое что на F задано правое действие $\beta: G^r_{n,m}\times F\to F$, согласованное с действием $\overline{\beta}: G^r_n\times\overline{F}\to\overline{F}$. Полем слоеных геометрических объектов на M типа (F,β) называем эквивариантное отображение $\lambda: P^r_{fol}M\to F$, проектирующееся в поле трансверсальных геометрических объектов $\overline{\lambda}: P^r_{tr}M\to\overline{F}$ типа $(\overline{F},\overline{\beta})$.

Применяя функтор $T^{\mathbb{D}^2}_{tr}$ к действию β и проектируемому полю слоеных объектов λ, получим действие $T^{\mathbb{D}^2}_{tr}\beta : T^{\mathbb{D}^2}_{tr} G^r_{n,m} \times T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F$ и $\mathbb{D}^2$-гладкое поле объектов $T^{\mathbb{D}^2}_{tr}\lambda : T^{\mathbb{D}^2}_{tr} P^r_{fol}M \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F$ типа $(T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F, T^{\mathbb{D}^2}_{tr}\beta)$ на $T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$. Будем предполагать, что действие $T^{\mathbb{D}^2}_{tr}\beta$ до $\mathbb{D}^2$-гладкого действия $B : G^r_{n,m}(\mathbb{D}^2) \times T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F$. $\mathbb{D}^2$-гладким полем геометрических объектов типа $(T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F, B)$ на $T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$ будем называть $\mathbb{D}^2$-гладкое эквивариантное отображение

$$\Lambda : P^r(\mathbb{D}^2) T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F.$$

Поле Λ проектируется в некоторое поле слоеных объектов $\lambda : P^r_{fol}M \to F$. Примером $\mathbb{D}^2$-гладкого поля геометрических объектов типа $(T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F, B)$ на $T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$ может служить продолжение $T^{\mathbb{D}^2}_{tr}\lambda$ поля слоеных геометрических объектов λ.

Теорема 1. *Пусть на слоеном многообразии M заданы поле слоеных геометрических объектов $\lambda : P^r_{fol}M \to F$ типа (F, β) и сечение $\alpha : M \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$, являющееся морфизмом слоений. Тогда композиция*

$$\mathscr{L}_\alpha\lambda = T^{\mathbb{D}^2}_{tr}\lambda \circ T^r_{n,m}\alpha : P^r_{fol}M \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F$$

является полем слоеных геометрических объектов на M типа $(T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F, \beta^{\mathbb{D}^2}_{tr})$.

Поле $\mathscr{L}_\alpha\lambda$ называем 2-джетом Ли поля слоеных геометрических объектов на M типа $(T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F, \beta^{\mathbb{D}^2}_{tr})$, называем 2-джетом Ли поля λ по отношению к сечению $\alpha : M \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$.

Поля Λ_1 и Λ_2 $\mathbb{D}^2$-гладких объектов типа $(T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F, B)$ на $T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$ называем эквивалентными, если существует $\mathbb{D}^2$-гладкий диффеоморфизм $A : T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$, проектирующийся в тождественное отображение $id : M \to M$, при котором Λ_1 переходит в Λ_2.

Теорема 2. *$\mathbb{D}^2$-гладкое поле Λ геометрических объектов типа $(T^{\mathbb{D}^2}_{tr} F, B)$ на расслоении $T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$ эквивалентно $\mathbb{D}^2$-продолжению $T^{\mathbb{D}^2}_{tr}\lambda$ поля слоеных геометрических объектов λ типа (F, β), определяемого полем Λ, тогда и только тогда, когда $\Lambda | P^r_{fol}M = \mathscr{L}_\alpha\lambda$ для некоторого сечения $\alpha : M \to T^{\mathbb{D}^2}_{tr} M$.*

Рассматриваются примеры.

Литература

1. Вишневский В. В. *Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации* // Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прилож. М. –ВИНИТИ – 1979. – Т. 73. С. 5–64.

2. Зубкова С. К., Шурыгин В. В. *Трансверсальные джеты Ли и голоморфные геометрические объекты на трансверсальных расслоениях* // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 5. С. 80–85.

SECOND ORDER TRANSVERSE BUNDLES IN THE CATEGORY OF MANIFOLDS OVER ALGEBRAS

S.K. Zubkova

We consider correspondences between holomorphic geometric objects on the second order transverse

bundle of a foliated manifold.
Keywords: Manifold over algebra, Lie derivative, second order transverse bundle.

УДК 514.764

УПЛОЩЕННЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ СО СВЯЗНОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА, ПОРОЖДЕННЫЕ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫМИ КОНЦИРКУЛЯРНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БАЗЫ

К.М. Зубрилин[1]

1 *kzubrilin@yandex.ru*; Керченский государственный морской технологический университет

В работе изучаются уплощающие свойства полного лифта инфинитезимального концикулярного преобразования. Касательное расслоение рассматривается как аффинно-связное пространство со связностью горизонтального лифта. Вводится понятие E-лифта для тензорного поля произвольного типа, употребление которого необходимо в ковариантном дифференцировании относительно связности горизонтального лифта.

Ключевые слова: Уплощение, порядок уплощения, р-геодезическая кривая, уплощенная кривая, р-геодезическое отображение, уплощенное отображение, р-геодезическое инфинитезимальное преобразование.

Уплощенные кривые. Вектор r-ой кривизны ξ_r определяется индуктивно: $\xi_r = \nabla_t \xi_{r-1}$, $\xi_1 = \nabla_t \xi$, ξ – поле касательных векторов.

Определение 1. ([1], [2]) *Произвольно возьмем точку p на кривой $\mathcal{C}$. Если в точке p векторы $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ линейно независимы, а векторы $\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, \xi_m$ линейно зависимы, то говорят, что кривая $\mathcal{C}$ в точке p имеет уплощение m-го порядка; число m называется порядком уплощения точки p кривой $\mathcal{C}$.*

По свойствам внешнего произведения, *условия*

$$\xi \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{m-1} \wedge \xi_m = 0, \quad \xi \wedge \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{m-1} \neq 0, \tag{1}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы кривая $\mathcal{C}$ имела в точке p уплощение m-го порядка.

Определение 2. ([1], [2]) *Кривая $\mathcal{C}$ в аффинно-связном пространстве (M, ∇) называется m-геодезической, если в каждой своей точке она имеет уплощение m-го порядка.*

Для того, чтобы кривая $\mathcal{C}$ была m-геодезической необходимо и достаточно, чтобы вдоль нее выполнялись условия (1).

С другой стороны, если кривая $\mathcal{C}$ – m-геодезическая, то вдоль нее выполняется равенство

$$\xi_m = a_0 \xi + a_1 \xi_1 + \ldots + a_{m-1} \xi_{m-1}, \tag{2}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ – некоторые функции, определенные вдоль кривой $\mathcal{C}$. Уравнение (2) представляет собой дифференциальное уравнение m-геодезической кривой.